

引用格式:杨晶晶,陈颖频. 基于二阶全变分与  $L_p$  伪范数的图像解模糊研究[J]. 微电子学与计算机, 2020, 37(9): 18-23.  
[YANG J J, CHEN Y P. Research on image deblurring based on second order total variation and  $L_p$  pseudo-norm [J]. Microelectronics & Computer, 2020, 37(9): 18-23.]

## 基于二阶全变分与 $L_p$ 伪范数的图像解模糊研究

杨晶晶<sup>1,2</sup>, 陈颖频<sup>2</sup>

(1 福州大学 物理与信息工程学院, 福建 福州 350000; 2 闽南师范大学 物理与信息工程学院, 福建 漳州 363000)

**摘 要:** 各向异性全变分模型广泛应用于图像解模糊, 然而, 传统的各向异性全变分模型存在以下两个缺点: 首先, 传统各向异性全变分模型假设图像为分片常数且只考虑了图像一阶梯度的稀疏约束导致恢复的图像存在严重的阶梯伪影效应; 其次传统全变分模型采用  $L_1$  范数来刻画图像梯度的稀疏性, 然而  $L_1$  范数刻画图像的稀疏性的能力有限, 为改进这两个缺点, 本文提出一种结合了二阶梯度稀疏约束和  $L_p$  伪范数新的去模糊方法, 引入二阶全变分是为了适应图像的先验项从而去除阶梯效应, 引入  $L_p$  伪范数是为了更准确刻画图像的稀疏性, 为求解模型, 采用交替乘子迭代法将模型分解为若干个去耦合的子问题, 通过实验展现本文提出方法的效果. 结果显示相比于本文提到的其他四种模型, 本文提出的模型具有更优的效果.

**关键词:** 二阶全变分;  $L_p$  伪范数; 交替乘子迭代法; 解模糊; 稀疏约束

**中图分类号:** TP751.1

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-7180(2020)09-0018-06

## Research on image deblurring based on second order total variation and $L_p$ pseudo-norm

YANG Jing-jing<sup>1,2</sup>, CHEN Ying-pin<sup>2</sup>

(1 College of Physics and Information Engineering of Fuzhou University, Fuzhou 350000, China;

2 School of Physics and Information Engineering of Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

**Abstract:** Anisotropic total variation (ATV) regularization is widely used in image deblurring applications. However, the traditional ATV model suffers from at least two limitations. Firstly, the traditional ATV model assumes the image to be piecewise constant and only considers the sparsity of the first-order image gradients, resulting in staircase artifacts. Secondly, the traditional ATV model employs the  $L_1$ -norm to depict the sparsity of image gradients. Nonetheless, the  $L_1$ -norm has a limited capability of depicting the sparsity of sparse variables. To overcome the two challenges, a new deblurring model is presented via the second-order gradient sparse constraint and  $L_p$ -pseudo-norm shrinkage. The second-order total variation is incorporated for fitting the image prior term and relieving the staircase artifacts. The  $L_p$ -pseudo-norm shrinkage is employed to depict sparse variables precisely. The alternating direction method of multipliers is employed to decompose the presented model into several decoupled subproblems. Finally, experiments are carried out to show the performance of the proposed method. The results show that the proposed method outperforms the other deblurring models mentioned in this article.

**Key words:** second-order total variation;  $L_p$ -pseudo-norm shrinkage; alternating direction method of multipliers; deblurring; sparse constraint

收稿日期: 2019-11-18; 修回日期: 2019-12-17

基金项目: 国家自然科学基金(41274127); 福建省重大教学改革项目(FBJG20180015); 福建省电子信息工程试点专业创新创业教改项目(2008-178026); 闽南师范大学校级教改项目(JG201918); 闽南师范大学校长基金(KJ19019); 福建省中青年教师科研教育项目(JAT190378)

## 1 引言

在采集、传输图像过程中,图像经常被模糊、噪声干扰<sup>[1]</sup>. 为从降质图像中获取清晰的图像,Rudin<sup>[2]</sup>提出了全变分(Total Variation, TV)正则化模型用于图像恢复. 经典的全变分模型分为各向异性全变分(Anisotropic Total Variation, ATV)模型和各项同性全变分<sup>[3]</sup>(Isotropic Total Variation, ITV)模型. 针对传统 TV 模型存在的不足<sup>[4-5]</sup>主要都基于一阶 ATV 模型加以改进,并未充分挖掘图像二阶梯度的稀疏性,本文将  $L_p$  伪范数用于刻画图像高阶梯度的稀疏性,提出基于二阶全变分与  $L_p$  伪范数(Second-order Total Variation  $L_p$  Pseudo-norm Shrinkage, STV- $L_p$ S)的图像解模糊模型. 采用交替乘子迭代法(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)<sup>[6]</sup>求解本文提出的模型 STV- $L_p$ S.

## 2 预备知识

ATV 解模糊模型<sup>[2]</sup>为:

$$F = \operatorname{argmin}_F \frac{1}{2} \|H^* F - G\|_2^2 + u R_{\text{ATV}}(F) \quad (1)$$

式中,  $H \in R^{N^2 \times N^2}$  表示高斯模糊核,本文的高斯模糊核由点扩散函数构成,  $F \in R^{N^2 \times N^2}$  代表原图片,  $G \in R^{N^2 \times N^2}$  代表被模糊后的图片即观测图片.  $\frac{1}{2} \|H^* F - G\|_2^2$  为保真项,  $R_{\text{ATV}}(F)$  为先验项,  $u$  为平衡因子用于平衡自由项和保真项. 当  $u$  过大时,解模糊的图像主要取决于先验知识,恢复的图像为 0; 当  $u$  过小时,解模糊的图像主要取决于观测图像的质量. 先验项为:

$$R_{\text{ATV}}(F) = \|K_h^* F\|_1 + \|K_v^* F\|_1 \quad (2)$$

式中,  $K_h = [-1, 1]$ ,  $K_v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $*$  表示二维卷积算子.

## 3 提出方法

### 3.1 二阶全变分 $L_p$ 伪范数解模糊模型

由于传统全变分模型只考虑了一阶梯度的信息,为了提升去模糊效果将传统的全变分模型延申为二阶全变分模型. 二阶全变分模型不仅仅考虑了一阶梯度的信息还在先验项中增加横向和纵向的两个二阶梯度信息. 为精确刻画二阶全变分的稀疏特性,本文将  $L_p$  伪范数引入二阶总变分解模糊模型中,提出本文数学模型,详见式(3).

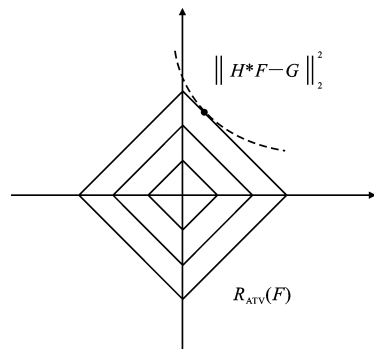
$$F = \operatorname{argmin}_F \frac{1}{2} \|H^* F - G\|_2^2$$

$$\begin{aligned} & + u_1 \|K_h^* F\|_p^p + u_2 \|K_v^* F\|_p^p \\ & + u_3 \|K_h^* K_h^* F\|_p^p + u_4 \|K_v^* K_v^* F\|_p^p \end{aligned} \quad (3)$$

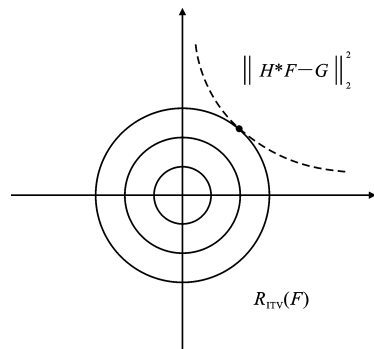
式中,  $0 < p < 1$ ,  $L_p$  伪范数定义为:  $\|F\|_p^p =$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |F_{ij}|^p.$$

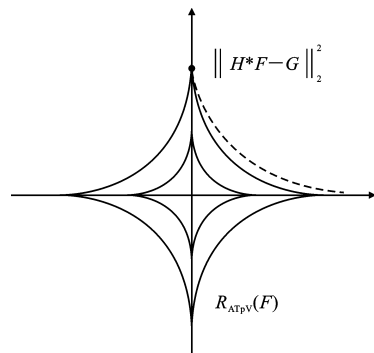
这里通过图 1 来解释了  $L_p$  伪范数的优点. 图 1(a) 为 ATV 先验项示意图采用  $L_1$  范数,图 1(b) 为 ITV 先验项示意图采用  $L_2$  范数,图 1(c) 为  $ATpV$  先验项示意图采用  $L_p$  伪范数. 在图 1 中虚线为保真项  $\|H^* F - G\|_2^2$ ,加粗实线表示的是先验项的等高线. 点为实线和虚线的交点. 显然,  $L_p$  伪范数相比于  $L_1$  范数和  $L_2$  范数提供了更大的自由度,能够更好地刻画梯度稀疏性.



(a) ATV 先验项示意图



(b) ITV 先验项示意图



(c) ATpV 先验项示意图

图 1 先验项示意图

### 3.2 基于交替乘子迭代法的模型求解

为求解式(4)定义的基于二阶全变分与  $L_p$  伪范数模型 (Second-order TV with  $L_p$  Shrinkage, STV-LpS), 利用 ADMM 框架对 STV-LpS 模型进行求解. 利用变量替换将分裂变量定义为:

$Z_1 = K_h^* F, Z_2 = K_v^* F, Z_3 = K_h^* K_h^* F, Z_4 = K_v^* K_v^* F$  原问题分解为带约束条件的子问题, 即:

$$\begin{cases} J = \frac{1}{2} \|H^* F - G\|_2^2 + u_1 \|Z_1\|_p^p \\ \quad + u_2 \|Z_2\|_p^p + u_3 \|Z_3\|_p^p + u_4 \|Z_4\|_p^p \\ Z_1 = K_h^* F \\ Z_2 = K_v^* F \\ Z_3 = K_h^* K_h^* F \\ Z_4 = K_v^* K_v^* F \end{cases} \quad (4)$$

根据 ADMM<sup>[6]</sup> 原理, 引入对偶变量  $\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{Z}_3$  和  $\tilde{Z}_4$ , 可将问题转化为无约束的增广拉格朗日函数, 即:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \|H^* F - G\|_2^2 \\ &+ u_1 \|Z_1\|_p^p + u_2 \|Z_2\|_p^p + u_3 \|Z_3\|_p^p + u_4 \|Z_4\|_p^p \\ &- \langle \beta \tilde{Z}_1, Z_1 - K_h^* F \rangle + \frac{\beta}{2} \|Z_1 - K_h^* F\|_2^2 \\ &- \langle \beta \tilde{Z}_2, Z_2 - K_v^* F \rangle + \frac{\beta}{2} \|Z_2 - K_v^* F\|_2^2 \\ &- \langle \beta \tilde{Z}_3, Z_3 - K_h^* K_h^* F \rangle + \frac{\beta}{2} \|Z_3 - K_h^* K_h^* F\|_2^2 \\ &- \langle \beta \tilde{Z}_4, Z_4 - K_v^* K_v^* F \rangle + \frac{\beta}{2} \|Z_4 - K_v^* K_v^* F\|_2^2 \end{aligned} \quad (5)$$

式中,  $\langle X, Y \rangle$  表示两个矩阵  $X, Y$  的内积.  $\beta$  为二次惩罚函数的惩罚因子.

#### 3.2.1 $F$ 子问题求解

$F$  子问题的目标函数为:

$$\begin{aligned} J_F &= \frac{1}{2} \|H^* F - G\|_2^2 + \frac{\beta}{2} \|Z_1 - K_h^* F\|_2^2 \\ &- \langle \beta \tilde{Z}_1, Z_1 - K_h^* F \rangle + \frac{\beta}{2} \|Z_2 - K_v^* F\|_2^2 \\ &- \langle \beta \tilde{Z}_2, Z_2 - K_v^* F \rangle + \frac{\beta}{2} \|Z_3 - K_h^* K_h^* F\|_2^2 \\ &- \langle \beta \tilde{Z}_3, Z_3 - K_h^* K_h^* F \rangle + \frac{\beta}{2} \|Z_4 - K_v^* K_v^* F\|_2^2 \\ &- \langle \beta \tilde{Z}_4, Z_4 - K_v^* K_v^* F \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

对式(6)进行傅里叶变换和配方, 得到频域表示式:

$$\begin{aligned} J_F &= \frac{1}{2} \|\bar{H} \circ \bar{F}^{(K+1)} - \bar{G}\|_2^2 \\ &+ \frac{\beta}{2} \|\bar{Z}_1(K) - \bar{K}_h \circ \bar{F}^{(K+1)} - \bar{\tilde{Z}}_1^{(K)}\|_2^2 \\ &+ \frac{\beta}{2} \|\bar{Z}_2(K) - \bar{K}_v \circ \bar{F}^{(K+1)} - \bar{\tilde{Z}}_2^{(K)}\|_2^2 \\ &+ \frac{\beta}{2} \|\bar{Z}_3(K) - \bar{K}_h \circ \bar{K}_h \circ \bar{F}^{(K+1)} - \bar{\tilde{Z}}_3^{(K)}\|_2^2 \\ &+ \frac{\beta}{2} \|\bar{Z}_4(K) - \bar{K}_v \circ \bar{K}_v \circ \bar{F}^{(K+1)} - \bar{\tilde{Z}}_4^{(K)}\|_2^2 \end{aligned} \quad (7)$$

式中,  $\circ$  为点乘操作.  $\bar{X}$  为  $X$  的频谱. 式(7)中, 对  $\bar{F}$  求偏导, 获得驻点为:

$$\bar{F}^{(K+1)} = \text{ifft2}(R_{hs}/L_{hs}) \quad (8)$$

式中, ifft2 表示二维反傅里叶变换算子. 式(8)中的除号表示点除操作.

$$\begin{aligned} L_{hs} &= \beta \circ \bar{K}_h^* \circ \bar{K}_h + \beta \circ \bar{K}_v^* \circ \bar{K}_v \\ &+ \beta \circ (\bar{K}_h \circ \bar{K}_h)^* \circ \bar{K}_h \circ \bar{K}_h \circ \bar{F}^{(K+1)} \\ &+ \beta \circ (\bar{K}_v \circ \bar{K}_v)^* \circ \bar{K}_v \circ \bar{K}_v \circ \bar{F}^{(K+1)} + \bar{H}^* \circ \bar{H} \\ R_{hs} &= \beta \circ \bar{K}_h^* \circ (\bar{\tilde{Z}}_1^{(K)} - \bar{\tilde{Z}}_1^{(K)}) \\ &+ \beta \circ \bar{K}_v^* \circ (\bar{\tilde{Z}}_2^{(K)} - \bar{\tilde{Z}}_2^{(K)}) + \bar{H}^* \circ \bar{G} \\ &+ \beta \circ (\bar{K}_h \circ \bar{K}_h)^* \circ (\bar{\tilde{Z}}_3^{(K)} - \bar{\tilde{Z}}_3^{(K)}) \\ &+ \beta \circ (\bar{K}_v \circ \bar{K}_v)^* \circ (\bar{\tilde{Z}}_4^{(K)} - \bar{\tilde{Z}}_4^{(K)}) \end{aligned}$$

#### 3.2.2 $Z_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 子问题求解

$Z_1$  子问题的目标函数为:

$$J_{Z_1} = u_1 (\|Z_1\|_p^p) + \frac{\beta}{2} \|\bar{Z}_1^{(K)} - \bar{K}_h \circ \bar{F}^{(K)} - \bar{\tilde{Z}}_1^{(K)}\|_2^2 \quad (9)$$

根据参考文献[7]提供的  $L_p$  伪范数收缩公式:  $\text{shrink}_p(\xi, \tau) = \max\{|\xi| - \tau^{2-p}|\xi|^{p-1}, 0\}$  得:

$$Z_1 = \text{shrink}_p(K_h^* F^{(K+1)} + \tilde{Z}_1^{(K)}, u_1/\beta) \quad (10)$$

同理,  $Z_2, Z_3, Z_4$  的更新公式为:

$$Z_i = \text{shrink}_p(K_i^* F^{(K+1)} + \tilde{Z}_i^{(k)}, u_i/\beta) \quad (11)$$

式中,  $K_2 = K_v, K_3 = K_h \circ K_h, K_4 = K_v \circ K_v$

#### 3.2.3 子问题求解

$\tilde{Z}_1$  子问题的目标函数为:

$$J_{\tilde{Z}_1^{(k+1)}} = -\langle \beta \tilde{Z}_1^{(k+1)}, \bar{Z}_1^{(k)} - \bar{K}_h \circ \bar{F}^{(k)} \rangle \quad (12)$$

利用梯度上升法可得:

$$\tilde{Z}_1^{(k+1)} = \tilde{Z}_1^{(k)} + \gamma \beta (K_h^* F^{(k)} - \bar{Z}_1^{(k)}) \quad (13)$$

式中,  $\gamma$  为学习率.

同理,  $\tilde{Z}_2, \tilde{Z}_3, \tilde{Z}_4$  为:

$$\begin{cases} \tilde{Z}_2^{(k+1)} = \tilde{Z}_2^{(k)} + \gamma\beta(K_v * F^{(k)} - Z_2^{(k)}) \\ \tilde{Z}_3^{(k+1)} = \tilde{Z}_3^{(k)} + \gamma\beta(K_h * K_h * F^{(k)} - Z_3^{(k)}) \\ \tilde{Z}_4^{(k+1)} = \tilde{Z}_4^{(k)} + \gamma\beta(K_v * K_v * F^{(k)} - Z_4^{(k)}) \end{cases} \quad (14)$$

STV-LpS 算法如表 1 所示.

表 1 算法表

|                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| STV-LpS 算法伪代码                                                                                                                          |
| Input: 观测图像 $G$ 、模糊核 $H$ .                                                                                                             |
| Output: 解模糊图像 $F$ .                                                                                                                    |
| Initialize:                                                                                                                            |
| $\tilde{Z}_1^{(0)}, \tilde{Z}_2^{(0)}, \tilde{Z}_3^{(0)}, \tilde{Z}_4^{(0)}, Z_1^{(0)}, Z_2^{(0)}, Z_3^{(0)}, Z_4^{(0)}, F^{(0)} = 0,$ |
| $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \beta = 0, \text{to } l = 1e-4, E = 1, k = 0.$                                                            |
| 1: While $E > \text{tol}$ do                                                                                                           |
| 2: 利用式(8)更新 $F^{(k+1)}$ ;                                                                                                              |
| 3: 利用式(10)、(11)更新 $Z_i(k+1) (i = 1, 2, 3, 4)$ ;                                                                                        |
| 4: 根据式(13)、(14)更新 $\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{Z}_3, \tilde{Z}_4$ ;                                                               |
| 5: $E = \ F^{(k+1)} - F^{(k)}\ _2 / \ F^{(k)}\ _2$ ;                                                                                   |
| 6: $k = k + 1$ ;                                                                                                                       |
| 7: End while                                                                                                                           |
| 8: Return $F^{(k)}$ as $F$ .                                                                                                           |

式中,  $\text{tol}$  为阈值,  $E$  为误差值.

## 4 实验与分析

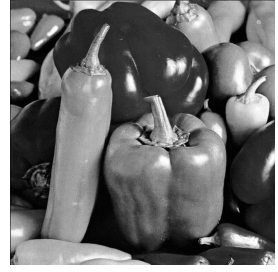
### 4.1 实验环境

实验过程中采用的软件为 MATLAB R2019a. 为了展示出本文提出的 STV-LpS 模型的优越性, 我们随机选取 6 幅不同的大小为  $256 \times 256$  的图片进行实验, 如图 2 所示. 本文使用的模糊类型为高斯模糊 (Gaussian Blur) 和运动模糊 (Motion Blur). 在 MATLAB 中 `fspecial('gaussian', B×B, σ)` 用于产生  $B \times B$  的高斯模糊核, 高斯模糊核的标准差为  $\sigma$ , 为了表示的方便, 我们将高斯模糊核写成  $(G, B, \sigma)$ . 在 MATLAB 中 `fspecial('motion', L, θ)` 用于表示产生运动位移  $L$ , 运动角度为  $\theta$  的运动模糊核, 为了表示的方便我们将运动模糊核写成  $(M, L, \theta)$ . 实验中采用的高斯噪声的标准差分别为 5、10、20. 在以下的实验中, 将提出的 STV-LpS 算法与已有的四种去模糊算法进行对比. 对比的算法包括 ATV<sup>[2]</sup>、ITV<sup>[3]</sup>、ATpV<sup>[4]</sup>、FTV4Lp<sup>[5]</sup> 以及本文提出的算法.

本文实验主要对比参数包括峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR) 结构相似性信息 (Structural Similarity, SSIM)<sup>[8]</sup>, 如(15)和式(16)所示.



(a) Lena



(b) Peppers



(c) Barbara



(d) Couple



(e) GoldHill



(f) Boat

图 2 测试图像

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \frac{255^2}{\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (X_{ij} - Y_{ij})^2} \quad (15)$$

式中,  $X$  表示原图,  $Y$  代表解模糊后的图像,  $u_x$  为图像  $X$  的平均值,  $u_y$  为图像  $Y$  的平均值,  $\sigma_x^2$  和  $\sigma_y^2$  分别代表  $X$  和  $Y$  的方差,  $\sigma_{XY}$  为  $X$  和  $XY$  的协方差.

$$\text{SSIM} = \frac{(2u_x u_y + 255^2 k_1^2)(2\sigma_{XY} + 255^2 k_2^2)}{(u_x^2 + u_y^2 + 255^2 k_1^2)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 255^2 k_2^2)} \quad (16)$$

式中, 取  $k_1 = 0.01$  和 确保 SSIM 的分母值非零. 算法效果评价的指标为: PSNR 越大时表明算法解模糊效果越佳, SSIM 越接近 1, 表示解模糊效果越好.

$$E = \|F^{(k+1)} - F^{(k)}\|_2 / \|F^{(k)}\|_2 \leq 10^{-4} \quad (17)$$

### 4.2 几种模型解模糊效果实验结果比较

对不同图像的测试结果见表 2~3, 黑色标粗的为最好指标. 表 2 记录了模糊核为  $G(5, 5, 5)$  时的解模糊评价指标. 表 3 记录了模糊核为  $M(15, 15)$  时的解模糊评价指标. 从表 2 和表 3 可以看到, 本文提出的方法在比对方法中获得最高的评价指标.

如图 3 所示. 在图 3(a) 为 Lena 图像受  $G(5, 5, 5)$  模糊, 且受到标准差为 5 的高斯噪声污染. 图 3

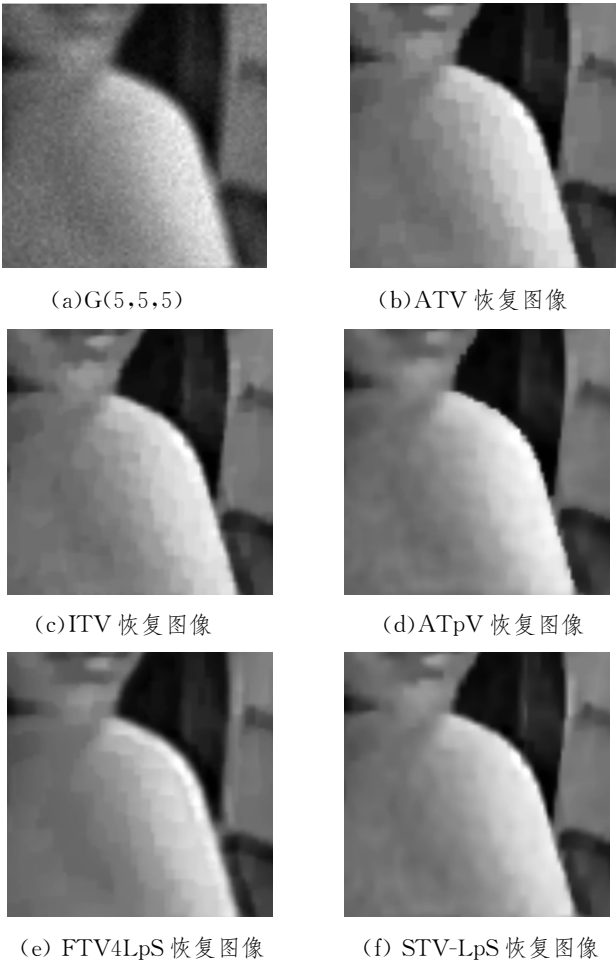


图 3 算法结果视觉比对图

(b)~(f)展示了几种算法去模糊的图像效果, 由图看出本文提出的解模糊模型 STV-LpS 能充分地去掉模糊和噪声. ATV、ITV、FTV4Lp 方法都存在阶梯伪影效应且 ATV 的阶梯伪影效应最严重.

5 结束语

本文提出二阶全变分 伪范数图像解模糊模型 STV-LpS. 在求解该模型过程中应用 ADMM 算法将变量分裂成若干个去耦合的子问题; 为了更好的刻画图像的稀疏特性, 引入  $L_p$  伪范数收缩; 采用二阶全变分避免了阶梯效应. 通过本文实验得到如下认识:

(1) 大多数情况下 STV-LpS 相对于 ATV、ITV、ATpV、FTV4Lp 能获得更大的 PSNR 和 SSIM 值, 这说明了本文提出的解模糊模型优于其他四种对比算法.

(2) 通过视觉效果图验证了 STV-LpS 模型的可行性即该模型可以去除阶梯伪影效应.

(3) 说明了分开调整先验项中一阶横方向、一阶纵方向、二阶横方向、二阶纵方向的平衡因子可以取得更好的指标. 值得注意的是, 本文只基于 ATV 模型进行研究, 且没有比较加入较新的交叠组稀疏正则项的结果, 未来可以基于 ITV 模型进行研究在实验中可以对比交叠组稀疏正则项进行研究.

表 2 五种算法对不同高斯模糊图像解模糊的 PSNR/dB 和 SSIM 值

| 图像       | 方法噪声<br>标准差 | ATV <sup>[2]</sup> |         | ITV <sup>[3]</sup> |         | ATpV <sup>[4]</sup> |         | FTV4Lp <sup>[5]</sup> |         | STV-LpS         |                |
|----------|-------------|--------------------|---------|--------------------|---------|---------------------|---------|-----------------------|---------|-----------------|----------------|
|          |             | PSNR               | SSIM    | PSNR               | SSIM    | PSNR                | SSIM    | PSNR                  | SSIM    | PSNR            | SSIM           |
| Lena     | 5           | 27.743 7           | 0.797 6 | 27.862 8           | 0.803 6 | 27.605 4            | 0.800 3 | 27.031 8              | 0.783 9 | <b>28.089 0</b> | <b>0.815 6</b> |
|          | 10          | 26.493 6           | 0.740 4 | 26.848 6           | 0.764 3 | 26.809 3            | 0.761 4 | 26.107 7              | 0.758 8 | <b>26.904 9</b> | <b>0.774 2</b> |
|          | 20          | 25.390 8           | 0.719 2 | 25.658 6           | 0.717 2 | 25.629 8            | 0.718 7 | 25.480 8              | 0.707 7 | <b>25.695 1</b> | <b>0.733 1</b> |
| Peppers  | 5           | 28.033 7           | 0.827 3 | 28.220 3           | 0.836 3 | 27.406 7            | 0.825 3 | 26.711 1              | 0.815 8 | <b>28.457 2</b> | <b>0.846 0</b> |
|          | 10          | 26.132 4           | 0.798 2 | 26.527 1           | 0.798 5 | 26.201 1            | 0.799 2 | 25.903 6              | 0.798 0 | <b>26.549 9</b> | <b>0.808 7</b> |
|          | 20          | 24.257 5           | 0.734 4 | 24.885 6           | 0.758 9 | 24.919 7            | 0.733 4 | 25.026 7              | 0.760 7 | <b>25.242 0</b> | <b>0.765 6</b> |
| Barbara  | 5           | 23.237 9           | 0.681 3 | 23.272 2           | 0.684 5 | 23.128 8            | 0.676 1 | 23.003 6              | 0.667 2 | <b>23.342 9</b> | <b>0.692 1</b> |
|          | 10          | 22.755 1           | 0.627 1 | 22.778 7           | 0.628 8 | 22.715 1            | 0.616 2 | 22.617 5              | 0.623 7 | <b>22.817 9</b> | <b>0.633 8</b> |
|          | 20          | 22.230 8           | 0.604 1 | 22.277 2           | 0.608 7 | 22.087 6            | 0.593 3 | 22.125 3              | 0.601 2 | <b>22.315 6</b> | <b>0.616 4</b> |
| Couple   | 5           | 25.341 0           | 0.700 7 | 25.421 0           | 0.709 5 | 25.084 0            | 0.692 5 | 24.976 2              | 0.692 1 | <b>25.518 8</b> | <b>0.719 4</b> |
|          | 10          | 24.111 1           | 0.628 3 | 24.132 8           | 0.630 5 | 23.917 9            | 0.614 6 | 23.808 9              | 0.622 2 | <b>24.165 4</b> | <b>0.639 4</b> |
|          | 20          | 23.156 4           | 0.559 6 | 23.096 7           | 0.558 0 | 23.059 8            | 0.554 1 | 23.049 2              | 0.560 8 | <b>23.197 3</b> | <b>0.568 4</b> |
| GoldHill | 5           | 26.582 2           | 0.705 9 | 26.509 4           | 0.703 9 | 26.655 5            | 0.712 2 | 26.698 7              | 0.707 0 | <b>27.114 0</b> | <b>0.721 7</b> |
|          | 10          | 25.917 7           | 0.654 7 | 25.940 4           | 0.658 2 | 25.806 9            | 0.655 0 | 25.364 2              | 0.644 8 | <b>26.035 3</b> | <b>0.657 3</b> |
|          | 20          | 24.824 3           | 0.589 9 | 24.816 9           | 0.590 3 | 24.881 5            | 0.582 4 | 24.496 9              | 0.585 2 | <b>24.912 7</b> | <b>0.596 4</b> |
| Boat     | 5           | 25.486 8           | 0.705 7 | 25.578 9           | 0.711 4 | 25.304 7            | 0.700 1 | 24.980 2              | 0.692 5 | <b>25.681 2</b> | <b>0.717 3</b> |
|          | 10          | 24.226 3           | 0.640 3 | 24.308 4           | 0.645 7 | 24.321 7            | 0.643 5 | 24.136 0              | 0.646 3 | <b>24.336 7</b> | <b>0.649 3</b> |
|          | 20          | 23.156 4           | 0.560 8 | 23.274 1           | 0.571 2 | 23.189 7            | 0.561 7 | 23.113 6              | 0.570 4 | <b>23.369 1</b> | <b>0.582 4</b> |

表 3 五种算法对不同运动模糊图像解模糊的 PSNR/dB 和 SSIM 值

| 图像       | 方法噪声<br>标准差 | ATV <sup>[2]</sup> |         | ITV <sup>[3]</sup> |         | ATpV <sup>[4]</sup> |         | FTV4Lp <sup>[5]</sup> |         | STV-LpS         |                |
|----------|-------------|--------------------|---------|--------------------|---------|---------------------|---------|-----------------------|---------|-----------------|----------------|
|          |             | PSNR               | SSIM    | PSNR               | SSIM    | PSNR                | SSIM    | PSNR                  | SSIM    | PSNR            | SSIM           |
| Lena     | 5           | 25.886 5           | 0.722 7 | 25.940 9           | 0.735 4 | 26.060 7            | 0.739 2 | 25.194 2              | 0.699 2 | <b>26.267 8</b> | <b>0.754 1</b> |
|          | 10          | 24.283 2           | 0.672 5 | 24.439 9           | 0.677 3 | 24.621 3            | 0.684 0 | 24.375 6              | 0.679 1 | <b>24.769 8</b> | <b>0.690 3</b> |
|          | 20          | 22.948 6           | 0.597 2 | 22.983 6           | 0.600 2 | 23.387 7            | 0.625 6 | 23.239 8              | 0.636 1 | <b>23.589 9</b> | <b>0.647 2</b> |
| Peppers  | 5           | 25.805 3           | 0.771 6 | 25.989 9           | 0.777 6 | 25.712 3            | 0.781 0 | 24.292 4              | 0.741 5 | <b>26.164 4</b> | <b>0.798 1</b> |
|          | 10          | 23.895 5           | 0.715 7 | 23.847 9           | 0.720 0 | 24.182 2            | 0.711 6 | 24.013 6              | 0.728 4 | <b>24.561 7</b> | <b>0.739 8</b> |
|          | 20          | 22.813 2           | 0.659 2 | 22.928 0           | 0.658 7 | 22.882 8            | 0.663 9 | 22.944 8              | 0.683 8 | <b>23.124 0</b> | <b>0.688 4</b> |
| Barbara  | 5           | 22.533 8           | 0.625 8 | 22.565 9           | 0.630 0 | 22.535 6            | 0.625 4 | 22.298 9              | 0.614 8 | <b>22.657 9</b> | <b>0.642 0</b> |
|          | 10          | 21.751 7           | 0.571 6 | 21.800 2           | 0.570 5 | 21.864 6            | 0.576 3 | 21.757 7              | 0.577 9 | <b>21.877 1</b> | <b>0.588 4</b> |
|          | 20          | 20.922 9           | 0.509 5 | 20.883 5           | 0.515 5 | 20.919 4            | 0.512 5 | 20.956 0              | 0.513 9 | <b>21.024 7</b> | <b>0.522 7</b> |
| Couple   | 5           | 23.931 3           | 0.624 5 | 23.920 9           | 0.624 6 | 23.789 8            | 0.618 1 | 23.520 1              | 0.605 8 | <b>23.988 4</b> | <b>0.634 0</b> |
|          | 10          | 22.880 2           | 0.549 3 | 22.869 5           | 0.549 4 | 22.933 2            | 0.554 1 | 22.777 4              | 0.550 9 | <b>22.933 5</b> | <b>0.553 0</b> |
|          | 20          | 22.014 9           | 0.485 5 | 21.997 1           | 0.485 0 | 21.979 6            | 0.481 2 | 22.052 8              | 0.491 5 | <b>22.115 4</b> | <b>0.496 1</b> |
| GoldHill | 5           | 25.332 6           | 0.657 5 | 25.385 8           | 0.662 1 | 25.609 8            | 0.668 4 | 25.331 0              | 0.661 8 | <b>25.757 4</b> | <b>0.668 4</b> |
|          | 10          | 24.371 8           | 0.592 2 | 24.366 0           | 0.596 0 | 24.302 5            | 0.594 7 | 24.354 1              | 0.597 7 | <b>24.557 6</b> | <b>0.604 5</b> |
|          | 20          | 23.311 4           | 0.525 4 | 23.220 1           | 0.527 4 | 23.458 0            | 0.530 1 | 23.484 3              | 0.538 4 | <b>23.594 1</b> | <b>0.538 9</b> |
| Boat     | 5           | 24.013 2           | 0.655 7 | 24.092 9           | 0.658 5 | 24.050 1            | 0.654 0 | 23.727 8              | 0.648 9 | <b>24.217 8</b> | <b>0.670 3</b> |
|          | 10          | 23.078 7           | 0.597 0 | 23.091 3           | 0.596 6 | 23.179 8            | 0.600 7 | 22.997 5              | 0.599 5 | <b>23.222 0</b> | <b>0.607 5</b> |
|          | 20          | 22.332 2           | 0.542 9 | 22.348 2           | 0.544 5 | 22.244 2            | 0.536 2 | 22.087 2              | 0.523 1 | <b>22.389 0</b> | <b>0.552 4</b> |

参考文献:

[1] WANG X, DING Y. A Filtering Algorithm for Removing Cauchy Noise in Images[J]. Acta Mathematica Scientia, 2018, 38A(4): 823-832.

[2] RUDIN LI, OHER S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1/4): 259-268.

[3] GONZÁLEZ G, KOLEHMAINEN V, SEPPÄNEN A. Isotropic and anisotropic total variation regularization in electrical impedance tomography[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2017, 74 (3): 564-576.

[4] LI S, HE Y M, CHEN Y P, et al. Fast multi-trace impedance inversion using anisotropic total p-variation regularization in the frequency domain [J]. Journal of Geophysics and Engineering, 2018, 15(5): 2171-2182.

[5] LIU X G, CHEN Y P, PENG Z M, et al. Infrared image super-resolution reconstruction based on quaternion fractional order total variation with  $L_p$  quasinorm

[J]. Applied Sciences, 2018(8): 1864.

[6] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. Foundations and Trends® in Machine learning, 2011, 3(1): 120-122.

[7] CHEN Y P, PENG Z M, ALI G, et al. Seismic signal time-Frequency representation by  $L_p$ -quasinorm constraint. [J]. Digital Signal Processing, 2019 (87): 43-59.

[8] LIU F, CHEN Y P, WANG L Z, et al. An efficient image reconstruction framework using total variation regularization with  $L_p$ -quasinorm and group gradient sparsity[J]. Information, 2019(10): 115-117.

作者简介:

杨晶晶 女, (1995-), 硕士研究生. 研究方向为图像处理.

陈颖频(通讯作者), 男, (1986-), 博士, 讲师. 研究方向为多维信号处理. E-mail: 110500617@163. com.